▶ Quadratische Gleichung

Bsp (Reduktion zur linearen Gleichung)

1) $4x^2 = 16 \Rightarrow x^2 = \frac{16}{4} = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

2) $3x^2 - 2 = x^2 + 2$

$2x^2 = 4$

$x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

3) $x(x+3) = 0$ (Ausklammern: $x^2 + 3x = 0$)

„oder" $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x+3 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -3 \end{array}\right.$

4) $(3x-1)^2 = 4$

$\left[\begin{array}{l} 3x - 1 = 2 \\ 3x - 1 = -2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = 3 \\ 3x = -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\frac{1}{3} \end{array}\right.$

Jede Gleichung der Form $x^2 + px + q = 0$ $p, q \neq 0$ kann man immer in die Form

* $\boxed{(x+d)^2 = e}$ bringen.

Dieser Prozess heißt „quadratische Ergänzung".

Bsp 1) $x^2 - 6x + 3 = 0$

$\underbrace{(x^2 - 2 \cdot 3x + 3^2)}_{\text{II bin. Formel}} - 3^2 + 3 = 0$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$$(x-3)^2 = 6$$

$$\left[\begin{array}{l} x-3 = \sqrt{6} \\ x-3 = -\sqrt{6} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3+\sqrt{6} \\ x = 3-\sqrt{6} \end{array}\right.$$

2) $x^2 + 10x + 30 = 0$

$$(x^2 + 2\cdot 5x + 5^2) - 5^2 + 30 = 0$$

$$(x+5)^2 - 25 + 30 = 0$$

$$\underbrace{(x+5)^2}_{\geq 0} = \underbrace{-5}_{< 0}$$ ↯ keine Lösungen

3) $x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} = 0$

$$(x^2 + 2\cdot\frac{1}{4}x + (\frac{1}{4})^2) - (\frac{1}{4})^2 - \frac{3}{4} = 0$$

$$(x + \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{16} - \frac{12}{16} = 0$$

$$(x + \frac{1}{4})^2 = \frac{13}{16} = \left(\frac{\sqrt{13}}{4}\right)^2$$

$$\left[\begin{array}{l} x + \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{13}}{4} \\ x + \frac{1}{4} = -\frac{\sqrt{13}}{4} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{13}}{4} \\ x = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{13}}{4} \end{array}\right.$$

4) (pq - Formel)

$$x^2 + px + q = 0$$

$$(x^2 + 2\cdot\frac{p}{2}x + (\frac{p}{2})^2) - (\frac{p}{2})^2 + q = 0$$

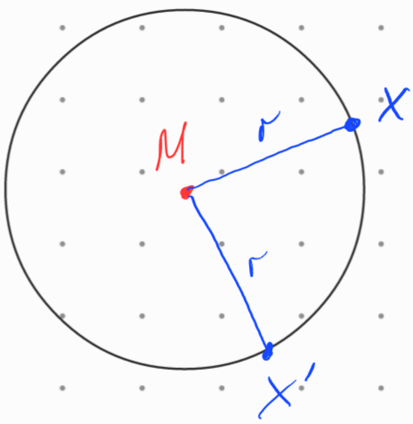
$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$$

$$\begin{cases} x+\frac{p}{2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q} \\ x+\frac{p}{2} = -\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q} \end{cases} \Rightarrow \quad x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

▶ Kreise

Kreis mit Mittelpunkt $M=(m,n)$ und dem Radius $r \geq 0$ ist die Menge aller Punkte X, die Abstand r zu M haben, d.h. $d(X,M)=r$ ist

$X=(x,y)$



$$d(X,M)=\sqrt{(x-m)^2+(y-n)^2}=r \quad \Big|\,\cdot^2$$

$$\boxed{(x-m)^2+(y-n)^2=r^2}$$

Kreisgleichung

Bsp $M=(2,3), \quad r=4$

$$(x-2)^2+(y-3)^2=4^2$$

$$x^2-4x+4+y^2-6y+9=16$$

$$x^2+y^2-4x-6y-3=0$$

i.A. kann jede Kreisgleichung in der Form

$$x^2+y^2+ax+by+c=0 \qquad a,b,c\in\mathbb{R}$$

geschrieben werden.

Nicht jede solche Gleichung beschreibt einen Kreis!

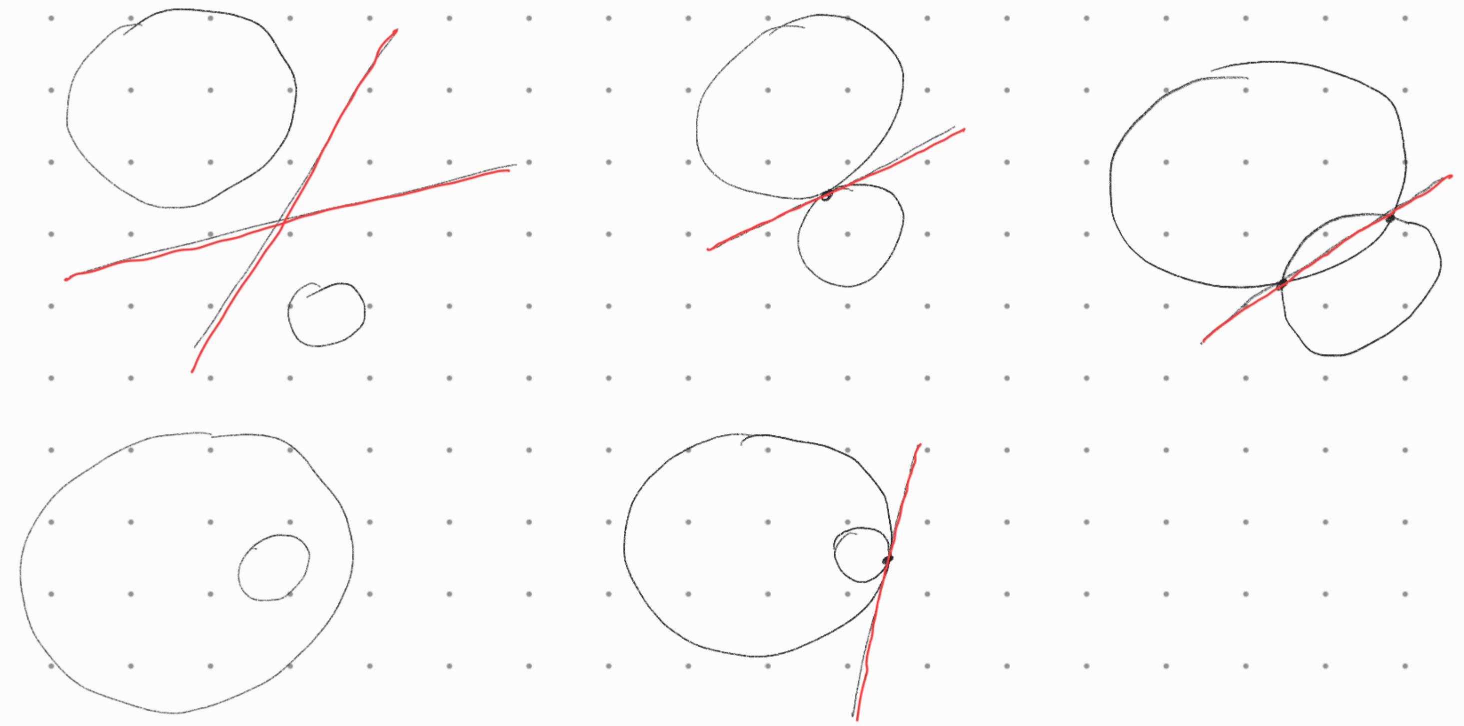
Bsp 2) $\quad x^2+y^2-4x-6y+13=0$

$$(x-2)^2+(y-3)^2=0$$

hat eine eindeutige Lösung $(x,y)=(2,3)$

$\Rightarrow$ Kreis mit Mittelpkt $M=(2,3)$ und Radius $r=0$

Bsp (Schnittmenge zweier Kreise)



K_1: $x^2+y^2+2x-6y+1=0$

K_2: $x^2+y^2-4x-4y-5=0$

Wir suchen alle Punkte $X=(x,y)$, die die beiden Gleichungen erfüllen.

I) $\cancel{x^2}+\cancel{y^2}+2x-6y+1=\cancel{x^2}+\cancel{y^2}-4x-4y-5$

$$-2y=-6x-6$$
$$y=3x+3$$

Gleichung einer Geraden!

II) Rückeinsetzen in K_1 oder K_2
(Schnittmenge Gerade und Kreis)

$$x^2+(3x+3)^2+2x-6(3x+3)+1=0$$

$$x^2+9x^2+\cancel{18x}+9+2x-\cancel{18x}-18+1=0$$

$$10x^2+2x-8=0$$

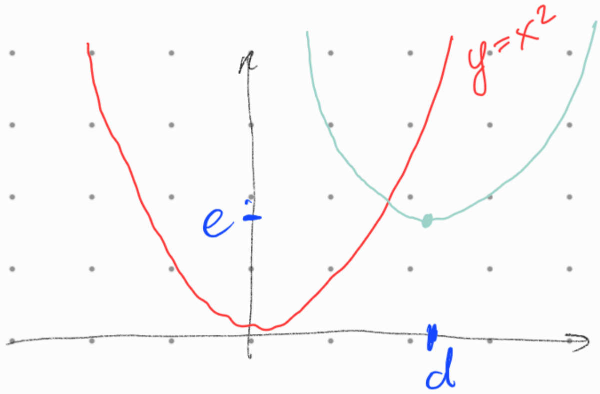
$$x^2+\frac{1}{5}x-\frac{4}{5}=0 \xrightarrow{\text{Lösen}} x_1=\frac{4}{5},\ x_2=-1$$

III) Einsetzen in die Geradengleichung:

$$y_1=\frac{27}{5}, \quad y_2=0$$

$$K_1 \cap K_2=\left\{\left(\frac{4}{5},\frac{27}{5}\right),(-1,0)\right\}$$

- Graph einer Quadratischen Funktion



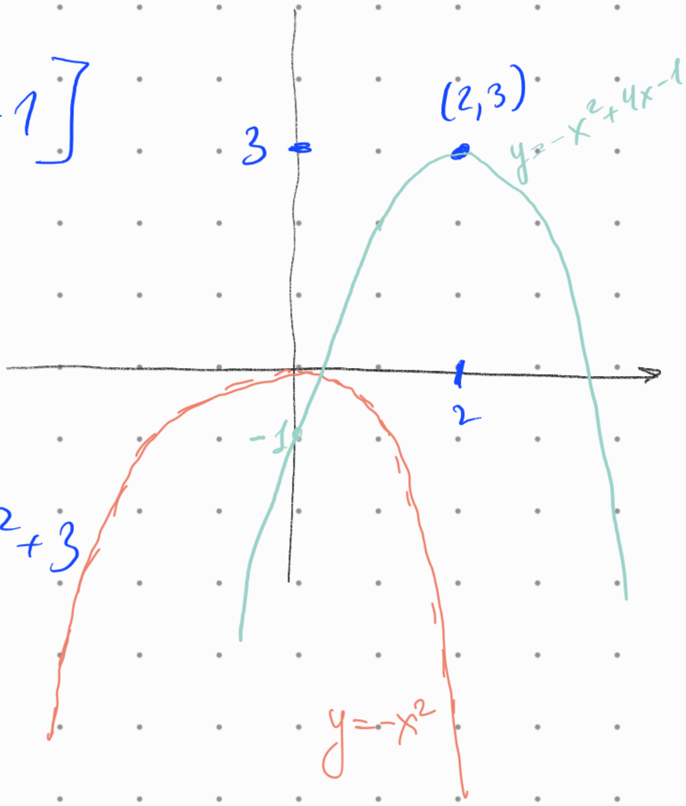
$$y=x^2+px+q$$
$$y=(x-d)^2+e$$

Der Graph von $y=(x-d)^2+e$ ist der Graph von $y=x^2$, der um d nach rechts und um e nach oben verschoben wurde.

i. A. $\underbrace{y=f(x-d)+e}_{}$ Graph von ist immer der Graph von $y=f(x)$, der um d nach rechts um e nach oben verschoben wurde.

Bsp Skizziere $y=-x^2+4x-1$

$$y=-\left[x^2-4x+1\right]$$
$$=-\left[\left(x^2-2\cdot 2x+2^2\right)-2^2+1\right]$$
$$=-\left[(x-2)^2-3\right]$$
$$=-(x-2)^2+3$$



Der Graph von $y=-(x-2)^2+3$ ist der von $y=-x^2$ um 2 nach rechts und 3 nach oben verschoben